

Les nombres complexes

- 2^{ème} Partie -

① Affixe d'un pt et d'un vecteur :

Dans le plan complexe on considère le pt : $M(x; y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$z = x + iy$ est l'affixe de $M(x + iy)$

z est aussi l'affixe du vecteur : \vec{OM}

et on écrit : $\text{aff}(M) = z = x + iy$

et $\text{aff}(\vec{OM}) = z$

En général :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{aff}(\vec{AB}) &= z_B - z_A \\ &= \text{aff}(B) - \text{aff}(A) \end{aligned}}$$

Exple : un triangle ABC est isocèle en A $\Leftrightarrow |\text{aff}(\vec{AB})| = |\text{aff}(\vec{AC})|$

② Mesure d'un angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC}) :

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}) &\equiv \arg\left(\frac{z_{AC}}{z_{AB}}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi] \end{aligned}}$$

Exple : Soient A, B, C et D tq :

$$z_A = i, z_B = 2i, z_C = 4 + i \text{ et :}$$

$$z_D = 4 + 3i$$

$$\text{mq : } (AB) \parallel (CD)$$

$$\text{* Rappel : } (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv 0 [2\pi] \\ \text{ou } (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \pi [2\pi] \end{cases}$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{ou } (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

EX:1) Soient : A(1+2i); B(-2+i) et : C(-1-2i). calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

En déduire la nature de ABC.

EX:2) A(1+i√3); B(-1-i)
C(-2-√3+i)

1) calculer : $\text{aff}(\vec{BA})$; $\text{aff}(\vec{BC})$

2) En déduire la nature de ABC.

③ Les carrés dans \mathbb{C} :

Ecrire sous forme d'un carré les nombres complexes :

$$-1; 4; -4; -8;$$

Applications :

Résoudre dans \mathbb{C} les éq :

$$z^4 = -1; z^2 = 4; z^3 = -4$$

④ Equation de 2^{ème} degré à coefficients réels.

$$(E): az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$a \neq 0$

Le discriminant de (E) :

$$\Delta = b^2 - 4ac; \text{ il y a 3 cas :}$$

1- si $\Delta = 0$ alors : unique solution (réelle) dans \mathbb{C} : $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

2- si $\Delta > 0$ alors : deux solutions (réelles) dans \mathbb{C} :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3- si $\Delta < 0$ il y a deux solutions complexes conjuguées dans \mathbb{C} :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exple : $z^2 - 2z + 2 = 0$

mq : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$ sont les solutions de l'éq.

EX: 3 | Résoudre dans \mathbb{C} les éq:

1) $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

3) $z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$

EX: 4 | on considère dans \mathbb{C} l'éq:

(E) $z^2 - 2z + 2 = 0$

1°) Résoudre (E) dans \mathbb{C} (les solutions z_1 et z_2 sont tq: $\text{Im}(z_1) > 0$
 $\text{Im}(z_2) < 0$)

2°) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Mg: $z_1^4 + z_2^4 = -8$

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct: (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les pts:

$A(1-i)$ et $B(1+i)$.

4-a) Donner $\frac{1+i}{1-i}$ sous forme algébrique.

4-b) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O .
(EXAM. BAC)

EX: 5 | 1) Résoudre dans \mathbb{C}

l'éq: (E): $z^2 + 2z + 4 = 0$

2) On pose: $a = -1 + i\sqrt{3}$

$b = 2$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$

écrire $a-b$ et $c-b$ sous forme trigonométrique.

3) En déduire le module et un argument du nombre $\frac{c-b}{a-b}$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les pts A, B et C d'affixes respectives: a, b et c

Montrer que ABC est équilatéral.
(EXAM de BAC)

EX: 6 | 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'éq:

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2°) On considère les pts A, B et C d'affixes respectives: $a = 8i$,

$b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

montrer que: $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3°) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

EX: 7 | $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$

1°) calculer $P(i)$ et $P(-i)$

2°) Trouver a, b et c dans \mathbb{R} tq: pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a:

$P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$

3°) Résoudre dans \mathbb{C} l'éq:

$P(z) = 0$

(← Suite) : Nbre complx.

EX: 4] En utilisant la req précédente ; trouver la forme trigonométrique de :

$$z = 1+i \quad \text{et de : } z' = \sqrt{3} + i$$

⑧ propriétés de l'argument :

$$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$-\arg(z) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$z \neq 0$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

EX: 5] Déterminer une écriture trigo des nbres :

$$(1+i) \times (\sqrt{3}+i) ; \quad \overline{\sqrt{3}+i} ; \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} ; \quad (\sqrt{3}+i)^5 ; \quad (1+i)^2 \times (\sqrt{3}-i)$$

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} ; \quad \left(\frac{i}{1-i}\right)^{2006} ; \quad i^{100}$$

⑨ props de la notation exponentielle.

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} ; \quad -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} ; \quad \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

Formule de MOIVRE :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EX: 6] Donner la forme exp des nbres :

$$z_1 = \cos(\theta) - i\sin(\theta) ; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_3 = 3i ; \quad z_4 = 8 + i8$$

$$z_5 = 7 - 7\sqrt{3}i ; \quad z_6 = \sqrt{\frac{3}{2}}(i-1)$$

$$z_7 = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} ; \quad z_8 = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$$

$$z_9 = (3+i)^4 ; \quad z_{10} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⑩ Formule d'Euler :

$$\left(\forall \theta \in \mathbb{R} \right) ; \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

⑪ Notions géométriques :

La notion géométrique	La relation
Distance AB	$AB = z_B - z_A $
I centre de [AB]	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$
A B et C sont alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
ABC est un triangle rectangle au pt A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[\pi, \pm \frac{\pi}{2} \right]$
ABC est isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$
ABC rectangle et isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2} \right]$

EX: 12] A ; B deux pts d'affixes

$$z_A = -1+i \quad z_B = -\sqrt{2}i + \sqrt{2}$$

① Placer les pts A et B.

② Mq les pts A ; B et O sont alignés. (Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$)